Conjunto dos Números reais

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.
http://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_real dia 10/08/2010
.

O conjunto dos **números reais** $\mathbb{R}$ é uma expansão do conjunto dos números racionais que engloba não só os inteiros e os fracionários, positivos e negativos, mas também todos os números irracionais.

Conjuntos de números
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \cdots$
Naturais $\mathbb{N}$
Inteiros $\mathbb{Z}$
Racionais $\mathbb{Q}$
Reais $\mathbb{R}$
Imaginários
Complexos $\mathbb{C}$
Números hiper-reais
Números hipercomplexos
Quaterniões $\mathbb{H}$
Octoniões $\mathbb{O}$
Sedeniões $\mathbb{S}$
Complexos hiperbólicos $\mathbb{R}^{1,1}$
Quaterniões hiperbólicos
Bicomplexos
Biquaterniões
Coquaterniões
Tessarines

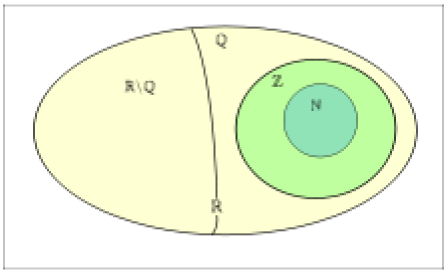


Diagrama de alguns subconjuntos de números reais.

Os números reais são números usados para representar uma quantidade contínua (incluindo o zero e os negativos). Pode-se pensar num número real como uma fracção decimal possivelmente infinita, como 3,141592(...). Os números reais têm uma correspondência biunívoca com os pontos de uma reta.

Denomina-se corpo dos números reais a colecção dos elementos pertencentes à conclusão dos racionais, formado pelo corpo de fracções associado aos inteiros (números racionais) e a norma associada ao infinito.

Existem também outras conclusões dos racionais, uma para cada número primo p, chamadas números p-ádicos. O corpo dos números p-ádicos é formado pelos racionais e a norma associada a p!

Índice

[esconder]

Propriedades

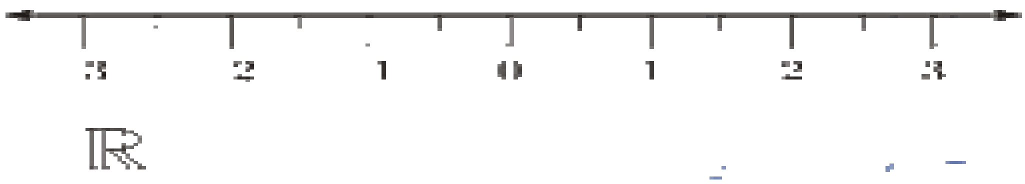
O conjunto dos números reais com as operações binárias de soma e produto e com a relação natural de ordem formam um corpo ordenado. Além das propriedades de um corpo ordenado, $\mathbb{R}$ tem a seguinte propriedade:

- Se $\mathbb{R}$ for dividido em dois conjuntos (uma partição) A e B, de modo que todo elemento de A é menor que todo elemento de B, então existe um elemento x que *separa* os dois conjuntos, ou seja, x é maior ou igual a todo elemento de A e menor ou igual a todo elemento de B

  $$\forall A,B,(\mathbb{R}=A\cup B\wedge(\forall a\in A,b\in B,(a<b)) \implies (\exists x,(\forall a\in A,b\in B \implies$$

- O conjunto dos números reais é um conjunto aberto e também um conjunto fechado.

Construção Intuitiva



Intuitivamente, podemos construir o conjuntos dos números reais a partir dos racionais da seguinte forma: uma *recta* formada por números racionais tem *buracos* (por exemplo, existe um buraco onde deveria estar a raiz quadrada de 2). O conjunto dos números reais completa essa recta, tapando todos os buracos, de forma que se a recta real está dividida em duas semi-rectas, então existe um ponto separando as duas semi-rectas.

Construção rigorosa

Existem várias formas rigorosas de construir $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$, as mais tradicionais[1] são através dos cortes de Dedekind e de sucessões de Cauchy.

Extensões

- O corpo dos números complexos é a única extensão algébrica do corpo $\mathbb{R}$.
- Não existe nenhuma extensão própria de $\mathbb{R}$ que seja um corpo Arquimediano
- Uma extensão transcendente de $\mathbb{R}$ pode ser construída tomando-se o corpo de frações gerado pelo anel de polinômios reais. Neste corpo pode ser definida uma relação de ordem, de forma que a inclusão de $\mathbb{R}$ neste corpo seja um isomorfismo de corpos ordenados entre $\mathbb{R}$ e sua imagem. Obviamente, neste corpo existem elementos maiores que qualquer racional, cujos inversos são números positivos menores que qualquer racional positivo (infinitésimos).

- O corpo ordenado dos números hiperreais estende $\mathbb{R}$, incluindo números infinitesimais.
- Pode-se acrescentar os dois elementos $-\infty \text{ e } \infty \quad \text{a } \mathbb{R}$, obtendo-se os números reais estendidos. Este conjunto, porém, não é um corpo, porque a soma e a multiplicação não são operações binárias (por exemplo, não existe uma definição satisfatória de $(-\infty) + \infty$).

Referências

1. ↑ Practical Foundations of Mathematics, por Paul Taylor