Número complexo

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

http://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_complexo dia 10/08/2010

Conjuntos de números
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \cdots$
Naturais $\mathbb{N}$
Inteiros $\mathbb{Z}$
Racionais $\mathbb{Q}$
Reais $\mathbb{R}$
Imaginários
Complexos $\mathbb{C}$
Números hiper-reais
Números hipercomplexos
Quaterniões $\mathbb{H}$
Octoniões $\mathbb{O}$
Sedeniões $\mathbb{S}$
Complexos hiperbólicos $\mathbb{R}^{1,1}$
Quaterniões hiperbólicos
Bicomplexos
Biquaterniões
Coquaterniões
Tessarines

Em matemática, os **números complexos** são os elementos do conjunto $\mathbb{C}$, uma extensão do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, onde existe um elemento que representa a raiz quadrada de número *-1*, a assim chamada unidade imaginária.

Cada número complexo z pode ser representado na forma:

$$z = a + bi$$

onde a e b são números reais conhecidos como *parte real* e *parte imaginária* de *z* e i denota a unidade imaginária:

$$i^2 = -1$$

O conjunto dos números complexos constitui uma estrutura algébrica denominada *corpo*. Este corpo é algebricamente fechado. Os complexos possuem também um módulo que, usado como norma, conduz a um espaço normado topologicamente completo.

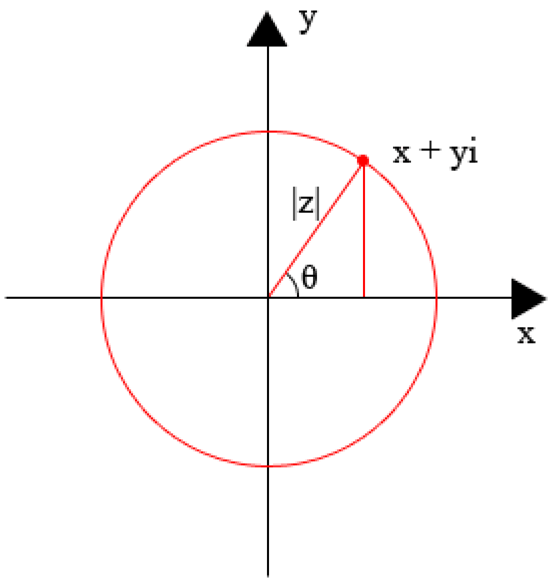
Os números complexos encontram aplicação em numerosos problemas da matemática, física e engenharia, sobretudo da solução de equações algébricas e equações diferenciais

Em engenharia e física, é comum a troca da letra i pela letra j, devido ao freqüente uso da primeira como indicação de corrente elétrica.

Índice

Definições

Plano complexo



No plano de Argand-Gauss, parte real é representada pela abscissa e a parte imaginária pela ordenadas.

O plano complexo, também chamado de **plano de Argand-Gauss** é uma representação geométrica do conjunto dos números complexos. Da mesma forma como a cada ponto da reta real está associado um número real, o plano complexo associa biunivocamente o ponto (x, y)do plano ao número complexo $x + yi$. Esta associação conduz a pelo menos duas formas de representar um número complexo:

- **Forma retangular** ou **cartesiana**: representa o número *Z* em coordenadas cartesianas $Z = (x, y) = x + iy$, separando a parte real da parte imaginária.
- **Forma polar**: $Z = r(cos\theta + i\sin\theta)$onde *r* é a distância euclidiana do ponto $Z = (x, y)$até a origem do sistema de coordenadas, chamada de **módulo** do número complexo e denotada $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Enquanto θé o ângulo entre a semi-reta $\overline{OZ}$ e o semi-eixo real, chamado de **argumento** do número complexo *Z* e denotado por $\arg(Z)$.

Através da identidade $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, a forma polar é equivalente à chamada **forma exponencial**: $Z = re^{i\theta}$

Operações Elementares

O conjunto dos números complexos é um corpo. Portanto, é fechado sobre as operações de adição e multiplicação, além de possuir a propriedade de que todo elemento não-nulo do conjunto possui um inverso multiplicativo. Todas as operações do corpo podem ser performadas através das propriedades associativa, comutativa e distribuitiva, levando em consideração a identidade $i^2 = -1$

Sejam *z* e *w* dois números complexos dados por $z = (a, b)$e $w = (c, d)$então definem-se as relações e operações elementares tal como segue:

- **Identidade**:

  $z = w$se e somente se $a = c$e $b = d$.

- **Soma**:

  $z + w = w + z = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

- **Produto**:

  $zw = wz = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$

- **Conjugado**:

  $\overline{z} = a - bi$, onde $\overline{z}$ denota o conjugado de z. Outra notação usada para o conjugado de z é z^* .

- **Produto de um Complexo por seu Conjugado**:

$$z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 - b^2i^2.$$

Como $i^2 = -1$, temos que o produto de um Número Complexo $a + bi$ pelo seu Conjugado $a - bi$ se dá por: $(z)\overline{z} = a^2 + b^2$.

- **Módulo**:

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- **Inverso multiplicativo** (para $z \neq 0$):

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

As operações de subtração e divisão são efetuadas transformando em adição com o oposto aditivo e em multiplicação com o inverso multiplicativo, respectivamente. Algumas operações são mais facilmente realizadas na forma polar:

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

- **Produto**:

$$z \cdot w = r_1\, e^{i\varphi_1} \cdot r_2\, e^{i\varphi_2} = r_1\, r_2\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

- **Inverso multiplicativo** (para $z \neq 0$):

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r_1\, e^{i\varphi_1}} = \frac{1}{r_1} \cdot e^{-i(\varphi_1)}$$

- **Divisão**:

$$\frac{z}{w} = \frac{r_1\, e^{i\varphi_1}}{r_2\, e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

- **Potenciação**:

$$z^n = (r_1\, e^{i\varphi_1})^n = r_1^n\, e^{in\varphi_1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

- **Conjugado**:

$$\overline{z} = r_1\, e^{-i\varphi_1}$$

A produto de um número complexo pelo seu conjugado é:

$$z\overline{z} = r_1\, e^{i\varphi_1} \cdot r_1\, e^{-i\varphi_1} = r_1 \cdot r_1\, e^{i\varphi_1 - i\varphi_1} = r_1^2\, e^0 = r_1^2$$

O módulo

Sejam *z* e *w* dois números complexos dados por $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$, o módulo possui as seguintes propriedades:

- $$\begin{array}{lcl} |z| & = & \sqrt{a^2 + b^2} \\ |\overline{z}| & = & |z| \\ |z \cdot w| & = & |z| \cdot |w| \\ |z + w| & \leq & |z| + |w| \\ |z| & = & 0 \iff z = 0 \end{array}$$

A distância entre dois números complexos é definida como:

$$\operatorname{dist}(z, w) = |z - w|$$

Propriedades algébricas

Gauss demonstrou que o conjunto dos números complexos é algebricamente fechado.

O conjunto dos números complexos formam um corpo algebricamente fechado. Isso significa que toda equação algébrica de grau não nulo pode possuir como solução um número complexo. Mais formalmente, a seguinte equação

$$\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0, \quad \alpha_n \neq 0$$

possui pelo menos uma solução complexa.

Este resultado é conhecido como teorema fundamental da álgebra e foi demonstrado primeiramente pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss.

Uma consequência deste teorema é que todo polinômio de grau *n* pode ser decomposto em um produto de n fatores lineares complexos:
$\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 = \alpha_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$

Radical algébrico

O radical algébrico é definido no conjunto dos números complexos como uma função multivalente, devido ao fato que a equação algébrica:

$$z^n = A$$

possui *n* soluções distintas para cada $A \neq 0$, que são dadas pela fórmula de De Moivre:

$$z_k = |A|^{1/n} \left(e^{i(\theta + 2k\pi)/n} \right), \quad k = 0, 1, \ldots, n - 1$$

onde $A = |A| e^{i\theta}$.

Propriedades topológicas e analíticas

O conjunto dos números complexos munido da distância $\mathrm{dist}(z, w) = |z - w|$ forma um espaço métrico completo. De fato, o módulo possui todas as características de uma norma.

Convergência nos complexos

Diz-se que uma sequência z_n de números complexos é convergente se existe um número complexo z tal que:

$$\lim_{n \to \infty} |z - z_n| = 0$$

neste caso, denota-se

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z \quad \text{ou} \quad z_n \to z$$

- É fácil verificar que se $z_n = a_n + i b_n$, então z_n converge para $z = a + ib$ se e somente se a_n converge para a e b_n converge para b.
- Do fato de que $||z_n| - |z|| \leq |z_n - z|$, é válido que se $z_n \to z$ então $|z_n| \to |z|$

O conjunto dos números complexos como extensão algébrica

No campo da álgebra abstrata, o número i pode ser interpretado como o elemento que gera a extensão algébrica dos números reais contendo a raiz do polinômio $x^2 + 1$. Isto é, o corpo $\mathbb{C}$ é isomorfo ao corpo quociente $\mathbb{R}/(x^2+1)$ pela aplicação $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}/(x^2+1)$, homomorfismo de anéis tal que restrito aos reais é a aplicação identidade e que leva i em $\phi(i) = x$.

Logaritmos

Função logarítmica natural

Definimos a função logarítmica natural de uma variável complexa z pela equação

$$\ln z = \ln r + i(\theta \pm 2k\pi)$$

onde r é o **módulo** e θ é o argumento medido em **radianos** do número complexo z; $k = (1, 2, 3, ...)$ e $\ln r$ define o logaritmo natural real positivo de r.

Assim, a função $\ln z$ é multivalente com infinitos valores - mesmo para números reais. Chamamos de *valor principal* de $\ln z$ o número definido por

$$\ln z = \ln r + i\theta$$

Função logarítmica decimal

Em termos de logaritmos decimais, podemos definir a função logarítmica anterior como:

$$\lg z = \lg r + i \lg e (\theta \pm 2k\pi)$$

Essa função também é multivalente e têm seu valor principal quando $k = 0$.

Gráficos de Funções Complexas

A representação gráfica de uma função com domínio e imagem no campo dos complexos é impraticável, pois tal função reside na quarta dimensão, ou seja, seria preciso um sistema de coordenadas com quatro eixos perpendiculares entre si para a construção da curva, a qual seria uma "superfície-2D" representada num "hiperespaço-4D".

Todavia, existem diversas maneiras de se estudar o comportamento de tais funções sem sair de nosso espaço euclidiano de três dimensões.

Uma delas, pouco usual, é representar uma função complexa, por exemplo "f(z)=-z", no próprio plano de Argand-Gauss, utilizando cores para representar o "jeito" da função. Este método denomina-se "Color Domain" ou Domínio de Cores.Temos então que para todo ponto do plano complexo está associada uma cor que corresponde à imagem da função neste ponto.Para mais informações veja "Links Externos".

Outra opção é representar apenas os valores da função que têm imagem real, como na figura ao lado.Esta secção da curva de uma função complexa irá resultar em uma nova curva unidimensional que está distribuída no espaço tridimensional.A representação dos valores reais da imagem da função complexa é interessante principalmente porque nos ajuda a compreender, por exemplo, as raízes complexas de um polinômio, como P(x)=x^2+1, cujas raízes são "i" e "-i".

Observe que na figura ao lado o plano X/Y corresponde ao plano de Argand-Gauss, e o eixo Z de valores reais representa a imagem de apenas números complexos cuja transformação "z^2+1" possui parte imaginária nula.Isso não quer dizer que a função não tenha imagem no campo complexo, apenas que essa imagem não pode ser representada na figura.