Raiz quadrada

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre
http://pt.wikipedia.org/wiki/Raiz_quadrada dia 10/08/2010.

Matematicamente, a **raiz quadrada** de um número real não negativo *x* é o número real não negativo que, quando multiplicado por si próprio, iguala *x*. A raiz quadrada de *x* é simbolizada por $\sqrt{x}$. Por exemplo: $\sqrt{16} = 4$porque 4 × 4 = 16, e $\sqrt{2}$ = 1.41421... . As raízes quadradas são importantes para a resolução de equações quadráticas (equações do 2º grau). A extensão da função raiz quadrada a números negativos leva à criação dos números imaginários e ao corpo dos números complexos.

O primeiro uso do símbolo da raiz quadrada remonta ao século XVI. Pensa-se que a sua origem está na letra *r* minúscula, primeira letra de *radix* (em latim, raiz).

Pode também ser uma operação geométrica - a partir de um segmento de recta dado determinar um outro cujo comprimento seja igual à raíz quadrada do inicial[1].

Índice

[esconder]

Propriedades

As seguintes propriedades da função raiz quadrada são válidas para todos os números reais positivos *x* e *y*:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x + y + 2\sqrt{xy}}$$

$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{x + y - 2\sqrt{xy}}$ sempre que $x \geq y$

$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$

$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

$\sqrt{x^2} = |x|$ para todo o número real x (ver valor absoluto)

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

A aplicação da função raiz quadrada a um número racional dá em geral origem a um número algébrico; $\sqrt{x}$ é racional se e somente se x puder ser representado por uma razão entre dois quadrados perfeitos. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é irracional (ver artigo raiz quadrada de dois).

Geometricamente, a função raiz quadrada transforma a área de um quadrado no comprimento do seu lado.

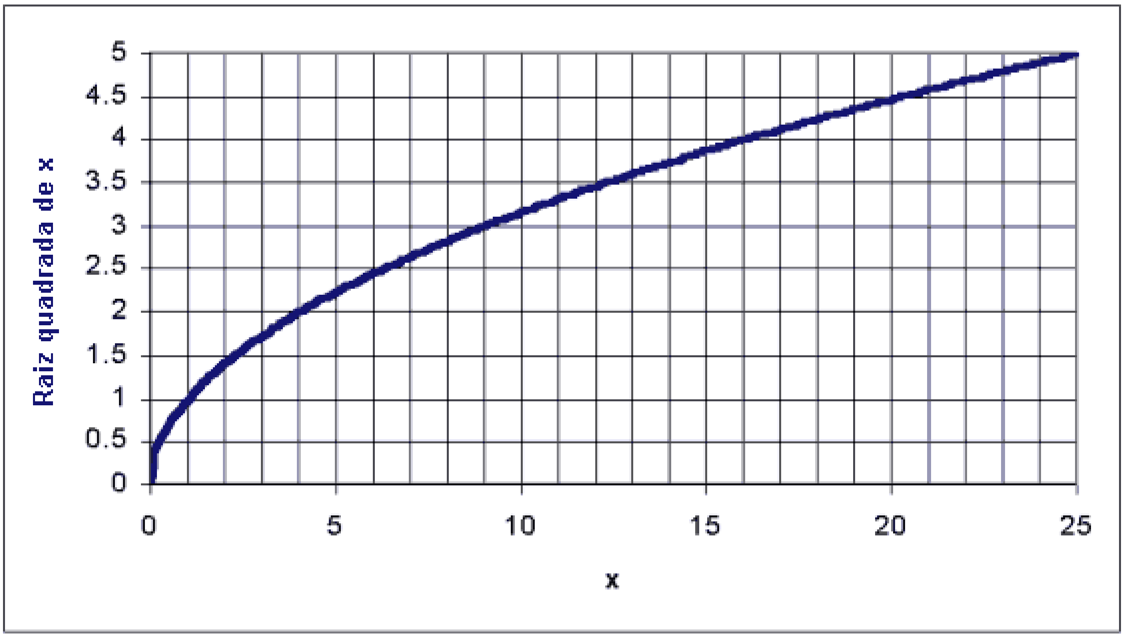
Admita-se que x e a são reais, e que $x^2 = a$, e que se quer determinar x. Um erro frequente é aplicar a função raiz quadrada e concluir que $x = \sqrt{a}$. Tal não é verdade uma vez que a raiz quadrada de x^2 não é x, mas sim o seu valor absoluto $|x|$ (uma das propriedades acima mencionadas). Portanto, apenas se pode concluir que $|x| = \sqrt{a}$, ou, de outra forma, que $x = \pm\sqrt{a}$.

Quando se pretende provar que a função raiz quadrada é contínua ou diferenciável, ou no cálculo de certos limites, a seguinte propriedade é de grande utilidade:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

Tal é válido para quaisquer x e y não negativos, sendo pelo menos um deles diferente de zero.

A função $f(x) = \sqrt{x}$ tem o seguinte gráfico:



A função é contínua para todo o x não negativo, e diferenciável para todo o x positivo. (não é diferenciável para $x = 0$ uma vez que o declive da tangente à curva nesse ponto é $+\infty$. A sua derivada é dada por

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

As séries de Taylor para $x = 1$ podem ser encontradas usando o teorema binomial:

$$\sqrt{x+1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-2)!}{n!(n-1)!2^{2n-1}} x^n$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

para $|x| < 1$.

Meios de calcular a Raiz quadrada

Calculadoras

As calculadoras portáteis tipicamente implementam boas rotinas para computar a função exponencial e o logaritmo natural, e elas computam a raiz quadrada de x usando a identidade: $\sqrt{x} = e^{\frac{1}{2}\ln x}$ A mesma identidade é explorada quando computamos raízes quadradas com tábuas de logaritmos ou réguas de cálculo.

Método babilônio

Um algoritmo frequentemente usado para aproximar $\sqrt{n}$ é conhecido como "método babilônio" (porque, especula-se, este era o método usado na Mesopotâmia para calcular a raiz quadrada[2], e é o mesmo obtido ao aplicar-se o Método de Newton à equação $x^2 - n = 0$. Para se encontrar a raiz quadrada de um número real n, processa-se como a seguir:

1. Inicie com um número positivo arbitrário *r* (preferencialmente próximo da raiz);
2. Substitua *r* pela média de *r* e *n/r*;
3. Repita o segundo passo para obter uma aproximação melhor.

Este algoritmo é quadraticamente convergente, que signfica que o número de dígitos corretos de *r* dobra a cada repetição.

Ele, entretanto, não dá a raiz *exata*, mas dá uma ótima aproximação. Abaixo, um exemplo do método para melhor compreensão

Método Babilônio (exemplificado)

O método babilônio é um método que dá uma aproximação da raiz quadrada. Ou seja não é um método perfeito, apresenta uma margem de erro (muito pequena, desprezível para cálculos que não necessitam muita precisão. De fato, dependendo da aproximação **todas** as casas decimais estarão corretas) . Mas se for para cálculos simples, é bom, pois não é necessário tanto rigor.

Digamos que se queira extrair a raiz quadrada de 66.

1. Ache o quadrado perfeito que mais se aproxima com o número.

$5^2=25$
$6^2=36$
$7^2=49$
$8^2=64$
$9^2=81$

Nesse caso o quadrado que mais se aproxima é 64. Nota: Usa-se sempre o quadrado menor que o número procurado, mesmo que o quadrado maior seja mais próximo.

1. Extraia a raiz quadrada do quadrado que mais se aproximou. A raiz quadrada de 64 é 8. Nesse exemplo chamaremos 8 como A.

1. Divida o número original por A, até que se tenha o dobro de casas decimais que A.

66:8 = 8,2

Nesse exemplo chamaremos 8,2 como B

1. Somamos A com B e dividimos por 2. Esse número chamaremos de C.

8 + 8,2 = 16,2
16,2 : 2 = 8,1

1. Agora dividimos o número original (nesse caso 66) por C até que se tenha o dobro de casas decimais de C. O resultado chamaremos de D.

66 : 8,1 = 8,148

1. Somamos C e D e dividimos por 2.Esse número chamaremos de E.

8.1 + 8.148 = 16.248
16.248 : 2 = 8,124

Essa seria a raiz quadrada de 66. Poderíamos dividir o 66 por E e continuar esse mesmo processo, só que isso acabaria por dar algumas imprecisões. E como geralmente não se necessita uma raiz quadrada precisíssima, então podemos dizer que é desnecessário prosseguir. Mas caso queira continuar, o algoritmo continua o mesmo e você pode tentar chegar á 10 ou 12 casas decimais. Mas o resultado seria um pouco impreciso.

Então podemos dizer que a raiz quadrada de 66 é aproximadamente 8,124. Ao testarmos numa calculadora: 8,124038405... Ou seja esse método é bom para achar a raiz quadrada.

Um algoritmo exato semelhante ao da divisão longa

Este método, apesar de muito mais lento que o método Babilônio, tem a vantagem de ser exato: dado um número que tem uma raíz quadrada cuja representação decimal termina, então o algoritmo termina e produz a raiz quadrada correta após um número finito de passos. Ele pode ser usado, portanto, para checar se um dado número é um quadrado perfeito.

Escreva o número em decimal e divida-o em pares de digitos, começando do ponto. Os números são colocados de uma maneira similar ao algoritmo de divisão longa e a raíz quadrada final aparecerá acima do número original.

Para cada iteração: Traga para baixo o par o mais significativo dos dígitos ainda não usados e adicione-os a todo o restante. Este é o valor atual consultado em etapas 2 e 3. Se r denotar a parte do resultado encontrado assim distante, determine o maior digito x que não faz y = x(20r + x) para exceder o valor atual. Coloque o dígito novo x na linha do quociente. Subtraia y do valor atual para dar forma a um restante novo. Se o restante for zero e não houver não mais dígito para trazer para baixo o algoritmo terminou. Se não continue com etapa 1. Exemplo: Que é a raiz quadrada de 152,2756?

```
              ____1__2._3__4_
              |  01 52.27 56                       1
x                01                1*1=1           1
                ____                              __
                 00 52                            22
2x               00 44             22*2=44         2
                ________                          ___
                    08 27                         243
24x                 07 29          243*3=729        3
```

```
                  ________                            _____
                      98 56                           2464
246x                  98 56         2464*4=9856          4
                     ________
                      00 00         O algoritmo termina:  a resposta é
12,34
```

Embora demonstrado aqui para números da base 10, o procedimento trabalha para algumas bases, incluindo a base 2. Na descrição acima, **20** meios dobram a base de número usada, no exemplo de binário isto seriam realmente **100** . que o algoritmo está no fato muito mais fácil de executar na base 2, como em cada etapa somente os dois dígitos 0 e 1 têm que ser testados.

Equação de Pell

A equação de Pell é um método para encontrar aproximações racionais de raízes quadradas das integrais.

Encontrando Raízes quadradas usando aritmética mental

Baseado na Equação de Pell's este é um método para obter a Raiz quadrada simplesmente subtraindo números ímpares.

Ex: Para obter $\sqrt{27}$ nós começamos com a seguinte sequência:

1. 27 - 1 = 26
2. 26 - 3 = 23
3. 23 - 5 = 18
4. 18 - 7 = 11
5. 11 - 9 = 2

5 passos foram tomados e isso nos leva que a parte inteira da raiz quadrada de 27 é 5.

$2 \times 100 = 200$ e $5 \times 20 + 1 = 101$

1. 200 - 101 = 99

O próximo número é 1.

$99 \times 100 = 9900$ e $51 \times 20 + 1 = 1021$

1. 9900 - 1021 = 8879
2. 8879 - 1023 = 7856
3. 7856 - 1025 = 6831
4. 6831 - 1027 = 5804
5. 5804 - 1029 = 4775
6. 4775 - 1031 = 3744

7. 3744 - 1033 = 2711
8. 2711 - 1035 = 1676
9. 1676 - 1037 = 639

O próximo número é 9.

O resultado nos dá 5.19 com uma aproximação da raiz quadrada de 27.

Método das Frações Continuadas

Irracionais Quadráticos, que são os números envolvendo raízes quadradas na forma $(a+\sqrt{b})/c$, são compostos por períodos de frações continuadas. Isto faz com que elas sejam fáceis de serem calculadas recursivamente, dado o período. Por exemplo, para calcular √2, nós temos que usar o fato de que √2-1 = [0;2,2,2,2,2,...], e usar a relação recursiva: $a_{n+1}=1/(2+a_n)$ com $a_0=0$ para obter √2-1 dada uma precisão especificada por n níveis de recursividade, e adicionar 1 ao resultado para obter √2.

Raiz quadrada de números complexos

Para todo número complexo z não-nulo existem exatamente dois números w tais que $w^2 = z$. A definição usual de $\sqrt{z}$ é como segue: se $z = r \exp(i\varphi)$ é representado em coordenadas polares com $-\pi < \varphi \leq \pi$, então fazemos $\sqrt{z} = \sqrt{r} \exp(i\varphi/2)$. Isto definido, a função raíz quadrada é holomórfica em todo ponto exceto nos números não-positivos reais (onde ela não é nem contínua). A série de Taylor acima para $\sqrt{(1+x)}$ continua válida para números complexos x com $|x| < 1$.

Quando o número complexo está na forma retangular, a seguinte fórmula pode ser usada:

$$\sqrt{x+iy} = \sqrt{\frac{|x+iy|+x}{2}} \pm i\sqrt{\frac{|x+iy|-x}{2}}$$

onde o sinal da parte imaginária da raiz é o mesmo que o sinal da parte imaginária do número original.

Perceba que, por causa da natureza descontínua da função raiz quadrada no plano complexo, a regra $\sqrt{(zw)} = \sqrt{(z)}\sqrt{(w)}$ é em geral **falsa**. Se for tomada erroneamente como verdadeira, esta regra pode levar a numerosas "provas" erradas, como por exemplo a seguinte prova real que mostra que -1 = 1:

$$-1 = i \times i = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1 \times -1} = \sqrt{1} = 1$$

A terceira igualdade não pode ser justificada.

Porém, a regra pode estar errada apenas até um fator -1, $\sqrt{(zw)} = \pm\sqrt{(z)}\sqrt{(w)}$, é verdadeiro para ambos ± tanto + como - (mas não ambos ao mesmo tempo). Perceba que $\sqrt{(c^2)} = \pm c$, portanto $\sqrt{(a^2b^2)} = \pm ab$ e finalmente $\sqrt{(zw)} = \pm\sqrt{(z)}\sqrt{(w)}$, com o uso de $a = \sqrt{(z)}$ e $b = \sqrt{(w)}$.

Raízes quadradas de matrizes e operadores

Se A é uma matriz positiva definida (ou um operador positivo definido), então existe exatamente uma matriz positiva definida (idem para operador) B tal que $B^2 = A$; definimos $\sqrt{A} = B$.

Mais genericamente, para cada matriz ou operador normal A existem operadores normais B tais que $B^2 = A$. Em geral, há vários operadores B para cada A e a função raiz quadrada não pode ser definida para operadores normais de uma maneira satisfatória.

Raiz quadrada dos 20 primeiros números inteiros positivos

√ 1 = 1
√ 2 ≈ 1,4142135623 7309504880 1688724209 6980785696 7187537694 8073176679 7379907324 78462
√ 3 ≈ 1,7320508075 6887729352 7446341505 8723669428 0525381038 0628055806 9794519330 16909
√ 4 = 2
√ 5 ≈ 2,2360679774 9978969640 9173668731 2762354406 1835961152 5724270897 2454105209 25638
√ 6 ≈ 2,4494897427 8317809819 7284074705 8913919659 4748065667 0128432692 5672509603 77457
√ 7 ≈ 2,6457513110 6459059050 1615753639 2604257102 5918308245 0180368334 4592010688 23230
√ 8 ≈ 2,8284271247 4619009760 3377448419 3961571393 4375075389 6146353359 4759814649 56924
√ 9 = 3
√10 ≈ 3,1622776601 6837933199 8893544432 7185337195 5513932521 6826857504 8527925944 38639
√11 ≈ 3,3166247903 5539984911 4932736670 6866839270 8854558935 3597058682 1461164846 42609
√12 ≈ 3,4641016151 3775458705 4892683011 7447338856 1050762076 1256111613 9589038660 33818
√13 ≈ 3,6055512754 6398929311 9221267470 4959462512 9657384524 6212710453 0562271669 48293
√14 ≈ 3,7416573867 7394138558 3748732316 5493017560 1980777872 6946303745 4673200351 56307
√15 ≈ 3,8729833462 0741688517 9265399782 3996108329 2170529159 0826587573 7661134830 91937
√16 = 4
√17 ≈ 4,1231056256 1766054982 1409855974 0770251471 9922537362 0434398633 5730949543 46338
√18 ≈ 4,2426406871 1928514640 5066172629 0942357090 1562613084 4219530039 2139721974 35386
√19 ≈ 4,3588989435 4067355223 6981983859 6156591370 0392523244 4936890344 1381595573 28203
√20 ≈ 4,4721359549 9957939281 8347337462 5524708812 3671922305 1448541794 4908210418